Глава 1

Устойчивость систем с непрерывным временем.

1.1 Устойчивость по Ляпунову. Постановка общей задачи.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = p(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Пусть в рассматриваемой части пространства состояний при всех t никаких проблем с существованием и единственностью решения уравнения (1.1) не возникает. Пусть в некоторый момент времени t_0 система находится в состоянии x_0^*. Этому состоянию отвечает определенное движение системы:

$$x^*(t) = x(t, t_0, x_0^*), \quad t \geqslant t_0. \tag{1.2}$$

Пусть в момент t_0 система находилась в положении x_0.

Определение. *Движение (1.2) будем называть невозмущенным, а любое другое движение*

$$x(t) = x(t, t_0, x_0), \quad t \geqslant t_0, x_0 \neq x_0^* \tag{1.3}$$

будем называть возмущенным.

Пусть вместе с уравнением (1.1) и невозмущенным движением (1.2) нам дана некоторая функция $q(t, x)$, и на невозмущенном движении эта функция обращается в известную функцию времени $q^*(t) = q(t, x^*(t)) = q(t, x(t,\ t_0, x_0^*))$.

Определение. *Невозмущенное движение системы (1.1) называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon \exists \delta$ такое, что выполнение неравенства*

$$\|x_0 - x_0^*\| \leqslant \delta \tag{1.4}$$

влечет за собой ограничение

$$\|q(t, x(t,\ t_0, x_0)) - q^*(t)\| < \varepsilon, \quad t > t_0. \tag{1.5}$$

Таким образом, об устойчивости системы можно говорить однозначно тогда, когда нам известна функция q, участвующая в постановке задачи.

Пример. *Рассмотрим движение материальной точки в ньютоновском поле сил. Если рассмотреть движение по круговой орбите, то оно устойчиво по отношению к радиусу орбиты и скорости движения материальной точки и неустойчиво по отношению к декартовым координатам.*

Движение материальной точки по эллиптической орбите неустойчиво по отношению к радиусу, скорости и декартовым координатам, но устойчиво по отношению к величине $r - \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, где p – фокальный параметр, ε – эксцентриситет, а φ и r – полярные координаты.

Задача. *Доказать этот пример, воспользовавшись законами Кеплера.*

Пример. *Рассмотрим уравнение дифференциального спуска*

$$\dot{x} = s\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f(x) \to \min .$$

Необходимым условием является $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. В данном случае мы не знаем невозмущенного движения, но знаем, что на нем $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Единственное, что мы можем здесь наблюдать – это поведение градиента, а потому положим $q = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Определение. *Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое δ_0, что выполнение неравенства*

$$\|x_0 - x_0^*\| \leqslant \delta \tag{1.6}$$

приводит к выполнению условия

$$\|q(t, x(t)) - q^*(t)\| \to 0, \quad t \to \infty. \tag{1.7}$$

Про область, определенную неравенством (1.6), говорят, что она лежит в области притяжения невозмущенного движения системы (1.1).

Задача. *Следуют ли из условий (1.6), (1.7) условия (1.4), (1.5)?*

Без ограничения общности можно считать, что на невозмущенном движении $q(t, x) = 0$. Пусть устойчивость рассматривается по отношению к вектору $z = q(t, x)$. На протяжении первой главы мы будем рассматривать систему (1.1) в предположении, что имеет место условие

$$z = x. \tag{1.8}$$

То есть невозмущенным движением мы будем считать нулевое решение дифференциального уравнения (1.1). Другими словами, мы будем предполагать, что x – вектор, которым характеризуется отклонение системы от нулевого решения. Предположим, что нулевое решение уравнения (1.1) существует. Пусть уравнение (1.1) при условии (1.8) определено в области

$$H_t^0 = \{t \geqslant 0, \|x\| < h_0\}. \tag{1.9}$$

Допустим, что в области H_t^0 функция $p(t, x)$ удовлетворяет условиям существования и единственности решения уравнения (1.1).

К точно такой же ситуации можно прийти в случае произвольного невозмущенного движения (1.2), если его отклонение рассматривать как $z = x - x^*(t)$. Это доказывается элементарной заменой переменных.

1.2 Функции Ляпунова.

Мы будем рассматривать

$$\dot{x} = p(t, x),$$
$$z = x,$$
$$H_0^t = \{t \geqslant 0, \|x\| < h_0\}.$$

Пусть функция $V(t, x)$ определена в области

$$H_t = \{t \geqslant 0, \|x\| \leqslant h, \quad h \leqslant h_0\}. \tag{1.10}$$

$V(t, x) : H_t \to \mathbb{R}$ – функция Ляпунова.

Функции Ляпунова позволяют судить о решениях дифференциальных уравнений, не находя этих решений.

Определение. *Неотрицательную функцию $V(t, x)$, обращающуюся в нуль на невозмущенном решении, мы будем называть функцией Ляпунова:*

$$V(t, 0) = 0, \quad t \geqslant 0; \quad V(t, x) \geqslant 0, \quad (t, x) \in H_t.$$

Определение. *Функция $W(x)$, не зависящая от t и удовлетворяющая условию $W(0) = 0$, называется определенно положительной в области H, если*

$$W(x) > 0 \forall x \in H = \{x : \|x\| \leqslant h\} \setminus \{0\}.$$

Определение. *Функция $V(t, x)$, называется определенно положительной в области H_t, если $\exists$ определенно положительная в области H функция $W(x)$, такая что*

$$V(t, x) \geqslant W(x), \quad (t, x) \in H_t.$$

Определение (Ляпунов). *Функция $f(\cdot)$ называется определенно отрицательной, если $-f(\cdot)$ определенно положительна.*

Определение. *Неотрицательная функция $V(t, x)$ называется допускающей бесконечно малые высшие пределы в области H_t (д.б.м.в.п.), если существует определенно положительная в H функция $W(x)$ такая, что $V(t, x) \leqslant W(x)$,$(t, x) \in H_t$.*

Пример. *Рассмотрим функцию $V(t, x) = a_1(t)x_1^2 + a_2(t)x_2^2$.*

1. *Если $\exists a_0 : a_1(t) \geqslant a_0 > 0$ и $a_2(t) \geqslant a_0 > 0$, тогда $V(t, x)$ определенно положительна.*

2. *Если $\exists a^+ : 0 \leqslant a_i \leqslant a^+$, тогда $V(t, x)$ является д.б.м.в.п. При x из пространства $\mathbb{R}^3$, это свойство сохраняется.*

Рассмотрим множество Ω_h — множество числовых функций $w(\cdot)$:

1. $w(\cdot) \in C[0, h]$,

2. $w(0) = 0$,

3. $w(\cdot)$ строго возрастает на $[0, h]$.

Лемма. *Функция* $W(x)$ *определенно положительна в* H, *если* $\exists w \in \Omega_h : w(\|x\|) \leqslant W(x)$, $\forall x \in H$.

Доказательство. Здесь и везде далее будем считать, что $W(x)$ непрерывна.
Положим $\varphi(r) = \min\{W(x) | \|x\| = r\}$ — непрерывная положительная функция и пусть $\alpha(r) \in \Omega_h : |\alpha(r)| \leqslant 1$, тогда в качестве $w(r)$ можно взять следующую функцию: $w(r) = \alpha(r) \cdot \min\limits_{r \leqslant s \leqslant h} \varphi(s)$ □

Напомним, что производная функции $V(t, x)$ в силу уравнения возмущенного движения вычисляется по следующему правилу:

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + < \frac{\partial V}{\partial x}, p(t, x) > .$$

1.3 Теоремы Ляпунова

Теорема (Первая теорема Ляпунова). *Невозмущеное движение* $x = 0$ *— устойчиво если существует определенно положительная в области* H_t *функция* $V(t, x)$, *производная которой, вычисленная в силу уравнения возмущенного движения* (1.1) *является знакопостоянной отрицательной или тождественно равной нулю.*

Доказательство. Надо показать, что $\forall \varepsilon > 0$ можно выбрать такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|x_0\| \leqslant \delta$ следует, что

$$\left\| x(t, t_0, x^0) \right\| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad t > t_0,$$

где t_0 — начальное время. Фиксируем $\forall\ \varepsilon \in (0, h)$, при наших допущениях функция $V(t, x)$ является определенно положительной, а тогда из предыдушей леммы следует, что $V(t_0, x)$ определенно положительна. Следовательно

- $\exists w_2(\cdot) : V(t_0, x) \leqslant w_2(\|x\|)$
- $\exists w_1(\cdot) : w_1(\|x\|) \leqslant V(t, x)$.

Теперь нужно выбрать δ из условия $w_1(\varepsilon) \geqslant w_2(\delta)$. Рисунок (1.1) иллюстрирует выбор δ.

Рассмотрим произвольную траекторию выпущеную из множество $\|x_0\| \leqslant \delta$, тогда из условий теоремы следует, что на этой траектории $\dot{V}(t, x(t)) \leqslant 0$, следовательно, на ней же функция Ляпунова имеет следующий вид

$$V(t, x(t)) \leqslant V(t_0, x_0) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0. \tag{1.11}$$

Для выпущенной траектории имеем:

$$w_1(\|x(t)\|) \leqslant V(t_0, x_0) \leqslant w_2(\|x_0\|) \leqslant w_2(\delta) \leqslant w_1(\varepsilon) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

А отсюда сразу следует, что $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$, $t \geqslant t_0$. □

Рис. 1.1: Выбор δ.

Теорема (Об асимптотической устойчивости). *Невозмущенное движение $x = 0$ асимптотически устойчиво, если существует определенно положительная в области H_t функция $W(t, x)$, д.б.м.в.п. в этой области, производная которой, вычисленная в силу уравнения возмущенного движения, является определенно отрицательной.*

Доказательство.

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, p(t, x) \right\rangle = -W(t, x). \tag{1.12}$$

Так как $W(t, x)$ положительно определена, то $-W(t, x)$ отрицательно определена. Надо доказать, что произвольная траектория, выходящая из области $\|x\| \leqslant \delta_0$ стремится к нулю при увеличении времени, то есть $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$
Проинтегрируем (1.12):

$$\int\limits_{t_0}^{t} W(\tau, x(\tau)) d\tau = V(t_0, x_0) - V(t, x(t)),$$

следовательно,

$$V(t, x(t)) \leqslant V(t_0, x_0), \tag{1.13}$$

отсюда

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} W(\tau, x(\tau)) d\tau \leqslant V(t_0, x_0) \tag{1.14}$$

Так как функция $W(t, x)$ является определенно положительной, то $\exists w_3 \in \Omega_h : W(t, x) \geqslant w_3(\|x\|)$ и

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} w_3(\|x(\tau)\|) d\tau \leqslant V(t_0, x_0). \tag{1.15}$$

Так как $V(t, x)$ определенно положительна и д.б.м.в.п., то

$$w_3(\|x(\tau)\|) d\tau = V(t_0, x_0).$$

Рис. 1.2: Выбор δ.

В силу определенной положительности производной на каждой траектории, начинающейся из области $\|x_0\| \leqslant \delta_0 = w_2^{-1}(w_1(h))$

$$V(t, x(t)) \to v_0 \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Здесь выбрали δ_0 из условия $w_2(\delta_0) \leqslant w_1(h)$ (см. рис. (1.2)).

Для завершения доказательства надо показать, что $v_0 = 0$. Пусть $v_0 > 0$, тогда используем условие о том, что $V(t, x)$ д.б.м.в.п. :

$$w_2(\|x(t)\|) \geqslant V(t, x(t)) \geqslant v_0$$

$$\|x(t)\| \geqslant w_2^{-1}(v_0) \quad \text{— положительная константа,}$$

следовательно

$$w_3(\|x(t)\|) \geqslant w_3(w_2^{-1}(v_0)),$$

$\Rightarrow$ интеграл расходится $\Rightarrow v_0 = 0$. □

Замечание. *Одним из достоинств метода функции Ляпунова является то, что по этой функции можно судить не только об устойчивости или неустойчивости системы, но и получить некоторые оценки: например, в доказательстве получили оценку для δ_0 : $\delta_0 \leqslant w_2^{-1}(w_1(h))$.*

Задача. *Расшифровать полученные оценки δ_0. Получить другие оценки, отказавшись от функций $w_i(\cdot)$*

Пример.

$$\dot{x} = \alpha x + K(t, x)x \tag{1.16}$$

x — вектор, K — кососимметрическая матрица. Сформулировать условия устойчивости и асимптотической устойчивости. Положим

$$V(x) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle,$$

тогда

$$\dot{V}(x) = \langle \dot{x}, x \rangle + \langle x, \dot{x} \rangle = \langle x, (\alpha I + K(t, x))x \rangle + \langle x, (\alpha I - K(t, x))x \rangle = 2\langle \alpha x, x \rangle.$$

Отсюда следует, что при $\alpha \leqslant 0$ система устойчива, а при $\alpha < 0$ асимптотически устойчива. Таким образом, устойчивость (неустойчивость) не зависит от вида функции $K(t, x)$.

Пример.

$$\dot{x} = \alpha(t)x + K(t,x)x.$$

Из аналогичных рассуждений следует, что

1. *при* $\alpha(t) \leqslant 0$ *система устойчива*
2. *при* $\alpha(t) \leqslant \alpha_0 < 0$ *асимптотически устойчива.*

Можно показать, что функция Ляпунова удовлетворяет уравнению

$$\dot{V}(x) = -2\alpha(t)V(x),$$

следовательно, вопрос сводится к решению уравнения первого порядка.

Пример.

$$\dot{x} = (a + \|x\|^2)x + K(t,x)x.$$

При $\alpha < 0$ *система устойчива, при* $\alpha > 0$ *неустойчива. Так как произошло усиление условия устойчивости* ($\alpha < 0$)*, то можно показать, что асимптотической устойчивости нет.*

1.4 Устойчивость потенциальных систем

Определение.

- *Рассмотрим некоторую функцию* $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, $U \in C^1(\mathbb{R}^m)$*, которую будем называть потенциальной энергией (существуют и другие названия: например, силовая функция).*
- *Динамическую систему, описываемую уравнением*

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{1.17}$$

  будем называть потенциальной.
- *Функцию*

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle$$

  – кинетической энергией.
- *Функцию*

$$E(x, \dot{x}) = U(x) + T(\dot{x}) \tag{1.18}$$

  – полной энергией системы.

Утверждение (Закон сохранения энергии). *Полная энергия потенциальной системы сохраняется:*

$$E(x(t), \dot{x}(t)) = E(x(t_0), \dot{x}(t_0)).$$

Доказательство. Вычислим производную полной энергии:

$$\dot{E}(x(t),\dot{x}(t)) = \left\langle \frac{\partial U}{\partial x}, \dot{x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial T(\dot{x})}{\partial \dot{x}}, \ddot{x} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial U}{\partial x}, \dot{x} \right\rangle - \left\langle \dot{x}, \frac{\partial U}{\partial x} \right\rangle = 0.$$

□

Теорема (1.3 Лагранжа). *Любое положение равновесия, являющееся изолированной точкой минимума потенциальной энергии, устойчиво.*

Доказательство. Каждой изолированной точке минимума x_* ставим в соответствие функцию Ляпунова:

$$V(x,\dot{x}) = E(x,\dot{x}) - U(x_*).$$

В окрестности положения равновесия $(x_*, 0)$ функция $V(x,\dot{x})$ определенно положительна, а ее производная в силу системы тождественно равна 0 (закон сохранения энергии). Применяя теорему Ляпунова, убеждаемся в истинности утверждения. □

Определение.

- *Пусть* $D(x)$ *– определенно-неотрицательная симметричная матрица. Функция*

$$R(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\langle \dot{x}, D(x)\dot{x} \rangle$$

  называется функцией Релея.

- $\frac{\partial R}{\partial \dot{x}}$ *– порождаемая этой функцией диссипативная сила.*

- *Будем говорить, что на систему наложена диссипативная сила, если движение в потенциальном поле осуществляется в присутствии диссипативных сил:*

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}}.$$

- *Пусть* $G(x)$ *– кососимметрическая матрица, тогда* $G(x)\dot{x}$ *– гироскопическая сила, и уравнение движения примет вид*

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} + G(x)\dot{x}. \tag{1.19}$$

Утверждение. *При выполнении условий теоремы Лагранжа устойчивость положения равновесия при наложении любых диссипативных и (или) гироскопических сил сохраняется.*

Доказательство.

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} + G(x)\dot{x}.$$

Производная функции Ляпунова $V(x,\dot{x})$, введенной при доказательстве теоремы Лагранжа, примет вид $\dot{V}(x,\dot{x}) = -\langle \dot{x}, D(x)\dot{x} \rangle$. (Мы учли, что $\langle \dot{x}, G(x)\dot{x} \rangle = \frac{1}{2}\langle x, (G(x) + G'(x))\dot{x} \rangle = 0$). Условия теоремы Ляпунова выполнены. Теорема доказана. □

Определение. *Диссипация называется полной, если* $D(x)$ *– определенно положительная матрица.*

Задача (*). *Показать, что положение равновесия становится асимптотически устойчивым, если диссипация является полной. Подсказка: на теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости не ссылаться, ее условия не выполнены, т.к. функция* $\dot{V}(x, \dot{x}) = -\langle \dot{x}, D(x)\dot{x} \rangle$ *не может быть определенно отрицательной.*

1.5 Признаки равномерной устойчивости

Рассмотрим систему (1.1)

$$\dot{x} = p(t, x), \quad (t, x) \in H_t^0$$

Определение. *Невозмущенное движение называется устойчивым по начальному моменту времени, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|x(t_0)\| \leqslant \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leqslant \varepsilon \quad \forall t > t_0.$$

Замечание. *В определении ранее введенного понятия устойчивости использовалось* $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$*, а здесь* $\delta = \delta(\varepsilon)$*!*

Теорема (1.4). *Невозмущенное движение системы* (1.1) *устойчиво равномерно по* t_0*, если существует определенно положительная и допускающая бесконечно малый высший предел функция Ляпунова* $V(t, x)$*, производная которой в силу системы знакопостоянна, отрицательна.*

Доказательство. По условию $\exists \omega_1, \omega_2(\cdot) : \omega_1(\|x\|) \leqslant V(t, x) \leqslant \omega_2(\|x\|)$. Для любого ε подберем такое δ, что $\omega_2(\delta) \leqslant \omega_1(\varepsilon)$. Далее доказательство идет, как в теореме Ляпунова. □

Определение.

- *Для траектории, выпущенной из точки* x_0*,* $\|x_0\| \leqslant \delta_0$*, будем понимать сходимость* $\|x(t)\| \to 0$ *при* $t \to 0$*, в следующем смысле:*

$$\forall \eta > 0 \quad \exists T = T(t_0, x_0, \eta) : \|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \eta \quad \forall t \geqslant t_0 + T.$$

- *Сходимость называется равномерной по* x_0*, если* T *не зависит от* x_0*.*
- *Сходимость называется равномерной по* t_0*, если* T *не зависит от* t_0*.*
- *Сходимость называется равномерной по* t_0 *и* x_0*, если* T *не зависит от* t_0 *и* x_0*.*

Лемма (Красовского). *Если невозмущенное движение асимптотически устойчиво равномерно по* t_0*, то имеет место равномерная по* x_0 *сходимость.*

Задача. *Доказать лемму, либо посмотреть доказательство в книге [1, Красовский].*

Утверждение. *При выполнении условий теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости имеет место устойчивость, равномерная по* t_0 *и* x_0*.*

Доказательство. Устойчивость, равномерная по t_0, следует из теоремы (1.4). Равномерная сходимость – из леммы Красовского. Докажем равномерную сходимость по t_0, то есть необходимо получить оценку $T(\delta_0, \eta)$, фигурирующего в определении равномерной по t_0 устойчивости:

$$\forall \eta > 0 \quad \exists T : \|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \eta \quad \forall t \geqslant t_0 + T.$$
$$V(t_0, x_0) \leqslant \omega_2(\delta_0) \quad \forall t_0.$$
$$V(t, x(t)) \leqslant \omega_1(\eta) \quad \forall t \geqslant t_0 + T.$$
$$\dot{V}(t, x) = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, p(t, x) \right\rangle + \frac{\partial V}{\partial t} = -W(t, x).$$
$$W(t, x) \geqslant \omega_3(\|x\|).$$
$$T \leqslant \frac{\omega_2(\delta_0) - \omega_1(\eta)}{\omega_3(\eta)}.$$

□

Теорема (1.5 об асимптотической устойчивости, равномерной по x_0). *Невозмущенное движение системы* (1.1) *асимптотически устойчиво равномерно по* x_0*, если существует определенно-положительная, допускающая бесконечно малый высший предел в* H_t *функция* $V(t, x)$*, производная которой в силу уравнения возмущенного движения удовлетворяет в этой области следующим условиям:*

$$W(t, x) = -\frac{\partial V}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, p(t, x) \right\rangle \geqslant 0,$$
$$\int_t^\infty a_\eta(\tau) d\tau = \infty, \quad \text{где} \quad a_\eta(t) = \inf_x \{W(t, x) | \|x\| = \eta\}.$$

Начало доказательства. Из леммы Красовского и теоремы (1.4) следует, что теорема будет доказана, если мы докажем сходимость траекторий возмущенного движения. Сделав предположение о несходимости траекторий, получим конфликт с интегральной оценкой

$$\int_{t_0}^\infty W(t, x(t)) dt \leqslant V(t_0, x_0).$$

□

1.6 Условие неравномерной асимптотической устойчивости

Было показано, что если функция Ляпунова допускает бесконечно малый высший предел, то имеет место равномерная асимптотическая устойчивость.

Возьмем теорему Ляпунова и отбросим требование бесконечно малого высшего предела. В этом случае снова получаем интегральную оценку $\int_{t_0}^\infty \omega_3(\|x(t)\|) dt \leqslant V(t_0, x_0)$.

Мешает только одно : из сходимости интеграла вовсе не следует схоимость $V(t, x)$ к нулю. Для наглядности рассмотрим пример:

Площадь каждого выброса будет стремиться к нулю (пики стягиваются) $\Rightarrow$ интеграл будет сходиться, но никакой асимптотической устойчивости не будет.

Теорема (Марачков). *Невозмущенное движение системы* (1.1) *асимптотически устойчиво, если:*

1) *существует определенно положительная функция $V(t, x)$, производная которой, вычисленная в силу уравнения возмущенного движения в области H_t, является определенно отрицательной;*

2) *существует константа $h_p > 0$: $\|p(t, x)\| \leqslant h_p$, $(t, x) \in H_t$*

Доказательство. самостоятельно □

Теорема (Массера). *Невозмущенное движение системы* (1.1) *асимптотически устойчиво, если существует определенно положительная функция $V(t, x)$ производная которой, вычисленная в силу уравнения возмущенного движения в области H_t, удовлетворяет неравенству:*

$$\dot{V}(t, x) \leqslant -\omega_3(V(t, x))$$

При выполнении условий теоремы Массера наша система является равномерно устойчивой по переменной $z_0 = V(t, x)$. Более того имеет место неравенство: $\dot{z}_0 \leqslant -\omega_3(z_0)$

Задача (*). *В каком смысле асимптотическая устойчивость при выполнении условий теоремы Массера может быть равномерной?*

1.7 Устойчивость в большом и целом.

Определение. *Пусть Δ – заданное положительное число. Невозмущенное движение системы* (1.1) *будем называть асимптотически устойчивым в большом, если оно асимптотически устойчиво и выполнено условие:*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to \infty, \quad \forall x_0 : \|x_0\| \leqslant \Delta \tag{1.20}$$

Пример. *Пусть даны две системы Σ_1 и Σ_2. Известно, что при выполнении следующих условий они асимптотически устойчивы (соответственно):*

$$\Sigma_1 \ : \ \|x_0\| \leqslant 0.001$$
$$\Sigma_2 \ : \ \|x_0\| \leqslant 0.1 \,.$$

Что можно сказать об асимптотической устойчивости в большом и малом этих систем?
Обе системы являются асимптотически устойчивыми в малом. Если $\Delta \leqslant 0.001$*, то они являются и асимптотически устойчивыми в большом. Если взять* $\Delta > 0.001$*, то про устойчивость в большом ничего определенного сказать нельзя.*

Замечание. *Можно ввести соответствующее определение равномерной устойчивости в большом.*

Задача. *Сформулировать условие равномерной устойчивости в большом.*

Определение. *Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым в целом, если оно устойчиво по Ляпунову, и все возмущенные движения сходятся к нему при любом начальном состоянии* x_0.

Казалось бы, что для устойчивости в целом достаточно потребовать выполнения условий соответствующих теорем во всем пространстве. Но Барбашин и Красовский привели пример, показывающий недостаточность этих требований.

Пример (Барбашин, Красовский).

$$\dot{x}_1 = \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{2x_2}{(1+x_2^2)^2} - 2x_1$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$
$$\dot{V}(x_1, x_2) = -4\left(\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^4} + \frac{x_2^2}{(1+x_2^2)^4}\right)$$

$\Rightarrow$ *условия теоремы Ляпунова выполнены* $\Rightarrow$ *есть асимптотическая устойчивость в малом, но сходимости при любом начальном состоянии* x_0 *нет. Построим поверхности уровня функции* $V(x_1, x_2) = \nu$ $(0 < \nu < \infty)$*. На рисунке видно, что в определенный момент просходит разрыв, и множество перестает быть выпуклым и замкнутым.*

В нашем случае интегральная оценка имеет вид

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} 4\left(\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^4} + \frac{x_2^2}{(1+x_2^2)^4}\right) dt \leqslant V(x_0)$$

Очевидно, что конфликта между сходимостью интеграла и стремлением $x_1(t) \to \infty$ *не происходит.*

Чтобы выйти из этого положения, нужно требовать ограниченность и вложенность друг в друга линий уровней, заполняющих все пространство.

Пусть H_t по x совпадает с $\mathbb{R}^n$.

Определение. *Функцию $V(t,x)$ будем называть функцией, допускающей бесконечно большой низший предел, если $\exists\omega_1$: $\omega_1(\|x\|) \leqslant V(t,x)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\omega_1(\|x\|) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$.*

Дополнив приведенные ранее теоремы требованием бесконечно большого низшего предела, получим признаки асимптотической устойчивости в целом.

Теорема. *Невозмущенное движение стационарной системы $\dot{x} = p(x)$ асимптотически устойчиво в целом, если существует допускающая бесконечно большой низший предел определенно положительная функция $V(x)$, производная которой, вычисленная в силу уравнения возмущенного движения, является функцией знакопостоянной отрицательной, а многообразие M, на котором производная функции Ляпунова обращается в нуль, не содержит целых возмущенных движений системы.*

1.8 Экспоненциальная устойчивость.

Рассмотрим систему (1.1):

$$\dot{x} = p(t,x)$$
$$z = x$$

Определение. *Пусть Δ_α, N, α — некоторые положительные константы. Невозмущенное движение системы (1.1) называется экспоненциально устойчивым, если*

$$\forall t_0, x_0 : \quad \|x_0\| \leqslant \Delta_\alpha \Rightarrow \tag{1.21}$$
$$\|x(t,x_0,t_0)\| \leqslant N\|x_0\|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t > t_0. \tag{1.22}$$

То есть, экспоненциальная устойчивость есть устойчивость экспоненциальной оценки. Из определения видно, что речь идет о равномерной по t_0 и x_0 устойчивости.

Пример.

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.23}$$
$$x = 0$$

Невозмущенное движение $x = 0$ асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Re}\lambda_i(A) < 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.24}$$

Построим функцию Ляпунова в виде квадратичной формы.

$$V(x) = \langle x, Lx \rangle,$$
$$\dot{V}(x) = -\langle x, Qx \rangle,$$

где Q *легко вычисляется следующим образом:*

$$\dot{V}(x) = \langle \dot{x}, Lx\rangle + \langle x, L\dot{x}\rangle = \langle Ax, Lx\rangle + \langle x, LAx\rangle = \langle x, (LA + A'L)x\rangle = -\langle x, Qx\rangle.$$

Таким образом, получаем следующее матричное уравнение Ляпунова:

$$LA + A'L = -Q. \tag{1.25}$$

Уравнение (1.25) разрешимо в следующем смысле: при выполнении неравенств (1.24) любой положительно определенной матрице Q *может быть поставлена в соответствие положительно определенная матрица* L*, удовлетворяющая уравнению Ляпунова (1.25).*

Для асимптотически устойчивой линейной системы также верна интегральная оценка:

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \langle x(t), Q(t)\rangle dt = \langle x_0, Lx_0\rangle.$$

Рассмотрим случай, когда решение линейного дифференциального уравнение (1.23) находится в следующем виде:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0.$$

Тогда из интегральной оценки получим:

$$L = \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{A'(t-t_0)}Qe^{A(t-t_0)}dt.$$

Сходимость интеграла гарантируется выполнением условий (1.24), а положительная знакоопределенность матрицы L *— положительной знакоопределенностью матрицы* Q.

Так как функция Ляпунова ищется в виде квадратичной формы, то верны следующие оценки:

$$c_1\|x\|^2 \leqslant V(x) \leqslant c_2\|x\|^2,$$
$$\dot{V}(x) \leqslant -c_3\|x\|^2,$$
$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \leqslant c_4\|x\|,$$

где c_1 *— минимальное собственное значение матрицы* L,
c_2 *— максимальное собственное значение матрицы* L,
c_3 *— минимальное собственное значение матрицы* Q,
$c_4 = \sqrt{2c_2}$.

При выполнении данных неравенств верно также неравенство:

$$\dot{V}(x) \leqslant -c_3\|x\|^2 \leqslant -\frac{c_3}{c_2}V(x).$$

Следовательно, наряду с интегральной оценкой имеет место экспоненциальная оценка:

$$V(x(t)) \leqslant V(x_0)e^{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)}.$$

Далее следует, что для любой траектории, начавшейся в области (1.21), имеет место оценка:

$$\|x(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\|x_0\|e^{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)}, \quad \forall t > t_0.$$

Таким образом, мы получаем оценки для значений N *и* α. *Факт сходимости траектории с экспоненциальной оценкой установлен. Следовательно, равномерная асимптотическая сходимость в случае линейной стационарной системы есть экспоненциальная устойчивость.*

Теорема (Н.Н. Красовский). *Невозмущенное движение системы (1.1) экспоненциально устойчиво, если существует функция* $V(t,x)$, *удовлетворяющая в области* H_t *следующим оценкам:*

$$c_1\|x\|^2 \leqslant V(t,x) \leqslant c_2\|x\|^2, \tag{1.26}$$

$$\dot V(t,x) \leqslant -c_3\|x\|^2, \tag{1.27}$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \leqslant c_4\|x\|. \tag{1.28}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству, приведенному выше в примере. □

Замечание. *Условие (1.28) в доказательстве не участвует, а приведено здесь для того, чтобы дать определение.*

Определение. *Функцию Ляпунова, удовлетворяющую оценкам (1.26), (1.27), (1.28), будем называть функцией Ляпунова, удовлетворяющей оценкам, характерным для квадратичных форм.*

На сколько экспоненциальная устойчивость далека от равномерной асимптотической? Как показано выше в примере, для линейного стационарного случая эти понятия эквивалентны.

Рассмотрим линейный нестационарный случай:

$$\dot x = A(t)x, \quad A(t) \text{— непрерывная матрица.} \tag{1.29}$$

Пример.

$$\dot x_1 = (1 - 9\cos^2 6t + 12\sin 6t\cos 6t)x_1 + (12\cos^2 6t + 9\sin 6t\cos 6t)x_2$$
$$\dot x_2 = (-12\sin^2 6t + 9\sin 6t\cos 6t)x_1 - (1 + 9\sin^2 6t + 12\sin 6t\cos 6t)x_2$$

Собственные значения матрицы системы: $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = -10 < 0$. *Однако, в отличие от стационарного случая, это не означает асимптотической устойчивости системы.*

Решение системы находят в виде: $x(t) = Q(t)Q^{-1}(t_0)x_0$, *где* $Q(t)$ *— фундаментальная матрица системы.*

$$q_{11} = e^{2t}(\cos 6t + 2\sin 6t)$$
$$q_{12} = e^{-13t}(\sin 6t - 2\cos 6t)$$
$$q_{21} = e^{2t}(\cos 6t - \sin 6t)$$
$$q_{22} = e^{-13t}(2\sin 6t + \cos 6t)$$

Наличие экспонент в положительных степенях указывает на то, что данная система не может быть асимптотически устойчивой.

Пример.

$$\dot{x}_1 = (-\frac{1}{2} + \frac{15}{2}\sin 12t)x_1 + (\frac{15}{2}\cos 12t)x_2$$
$$\dot{x}_2 = (\frac{15}{2}\cos 12t)x_1 + (-\frac{1}{2} - \frac{15}{2}\sin 12t)x_2$$

Собственные значения матрицы системы: $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = 13 > 0$. *Но система будет асимптотически устойчивой.*

Основной вывод: никакой связи между собственными значениями и поведением траектории системы в нестационарном случае не существует.

Пример (*). *Доказать, что из равномерной асимптотической устойчивости (по* x_0, t_0*) следует экспоненциальная устойчивость.*

1.9 Проблема существования функции Ляпунова.

В данном пункте будет рассмотрен следующий вопрос: существует ли функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям соответствующих теорем, когда возмущенное движение обладает соответствующими свойствами?

При положительном ответе на этот вопрос условия соответствующих теорем превратились бы из достаточных в необходимые и достаточные. Характер поведения возмущенных движений, определяемый существованием той или иной функции Ляпунова, из классических теорем теории устойчивости (все, рассмотренные выше, кроме теоремы о простой асимптотической устойчивости), является не только достаточным, но и необходимым условием существования такой функции.

Свойство гладкости функции Ляпунова намного выше свойства гладкости вектор-функции $p(t, x)$. В частности, в условиях равномерной асимптотической устойчивости из равномерной непрерывности по t вектор-функции $p(t, x)$ в рассматриваемой окрестности следует существование непрерывных производных функции Ляпунова по всем переменным любого порядка.

1.10 Устойчивость по части переменных.

Рассмотрим систему:

$$\begin{gathered} \dot{x} = p(t, x) \qquad (1.30) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ x = 0 \\ p(t, 0) = 0, \quad t \geqslant 0 \\ H_0 = \{t, x | t \geqslant 0, \|y\| \leqslant h_0, |x_{m+1}| < \infty, \dots, |x_n| < \infty\} \end{gathered}$$

Устойчивость по переменной $y \in \mathbb{R}^m$, $y_1 = x_1, \dots, y_m = x_m$.

Определение. *Невозмущенное движение системы (1.30) y–устойчиво, если*

$$\forall \varepsilon \quad \exists \delta : \|x_0\| \leqslant \delta \Rightarrow \tag{1.31}$$
$$\|y(t)\| \leqslant \varepsilon, \quad t > t_0. \tag{1.32}$$

$$y(t) = y(t, t_0, x_0) = \begin{bmatrix} x_1(t, t_0, x_0) \\ \dots \\ x_m(t, t_0, x_0) \end{bmatrix}$$

Аналогичным образом определяется асимптотическая y–устойчивость.

$$H_t = \{t, x | t \geqslant 0, \|y\| \leqslant h, |x_{m+1}| < \infty, \dots, |x_n| < \infty\}.$$

Определение. *Неотрицательную функцию* $V(t, x)$*, рассматриваемую в области* H_t*, будем называть y–определенно положительной в области* H_t*, если в* H_t *верно неравенство:*

$$\omega_1(\|y\|) \leqslant V(t, x).$$

Пример.

$$V(t, x) = a_1(t)x_1^2 + a_2(t)x_2^2.$$

$m = 1$*, то функция y–определенно положительна, если* $a_1(t) \geqslant \varepsilon > 0$*,* $a_2(t) \geqslant 0$.
$m = 2$*, то функция y–определенно положительна, если* $a_1(t) \geqslant \varepsilon > 0$*,* $a_2(t) \geqslant \varepsilon > 0$.
$m \geqslant 3$*, то функция никогда не будет y–определенно положительна.*

Теорема (Теорема Румянцева об устойчивости по части переменных). *Невозмущенное движение системы* (1.1) y*-устойчиво, если существует* y*-определенно положительная функция* $V(t, x)$*, производная которой в силу уравнения* (1.1) *является функцией знакопостоянной отрицательной в области* H_t*.*

Доказательство. Справедливо неравенство

$$\omega_1(\|y\|) \leqslant V(t, x)$$

для всех $x, t \in H_t = \{x, t | \|y\| < h, |x_i| < \infty, i = m + 1, \dots, n\}$.

Для производной в силу системы справедливо

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + < \frac{\partial V}{\partial x}, p(t, x) > \leqslant 0.$$

Пусть $\varepsilon < h$, можем выбрать δ так, что

$$\max\{V(t_0, x) | \|x\| < \delta\} \leqslant \omega_1(\varepsilon),$$

т.к. $\dot{V}(t, x)$ является функцией знакопостоянной отрицательной, получим, что любая траектория, стартующая из области $\|x_0\| < \delta$, удовлетворяет

$$\omega_1(\|y(t)\|) \leqslant V(t, x(t)) \leqslant V(t_0, x_0) \leqslant \omega_1(\varepsilon).$$

□

Теорема (Теорема Румянцева об асимптотической устойчивости по части переменных). *Невозмущенное движение системы (1.1) асимптотически y-устойчиво, если существует допускающая бесконечно малый высший предел функция $V(t,x)$, производная которой в силу уравнения (1.1) является функцией знакопостоянной отрицательной в области H_t.*

Пример. *Рассмотрим систему*

$$\dot{x} = -A(t)x + K(t,x)x,$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n(t) \end{pmatrix},$$

а $K(t,x)$ — произвольная кососимметрическая матрица.

Рассмотрим функцию $V(x) = \|x\|^2$,ее производная в силу системы $\dot{V}(x) = -<x, A(t)x>$. Исходя из свойств производной можно сделать вывод об устойчивости системы

1. *система устойчива по Ляпунову и равномерно устойчива по t_0, если $a_i(t) \geqslant 0$, $i = 1, \dots, n$;*

2. *система асимптотически устойчива по Ляпунову и равномерно асимптотически устойчива по t_0, если $a_i(t) \geqslant \varepsilon > 0$, $i = 1, \dots, n$;*

3. *система y-устойчива по Ляпунову, если $a_i(t) \geqslant 0$, $i = 1, \dots, n$.*

Задача. *Какие условия необходимо наложить на матрицу $A(t)$, для того чтобы система была*

1. *асимптотически устойчива равномерно по x_0;*

2. *асимптотически y-устойчива.*

1.11 Проблема стабилизации

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = F(t,x) + G(t,x)u, \tag{1.33}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор, характеризующий отклонение от невозмущенного движения; $u \in \mathbb{R}^n$ — управление; $F : H_t^0 \to \mathbb{R}^n$ — вектор-функция; $G(t,x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — матрица.

$$u = u(t,x). \tag{1.34}$$

Определение. *Вектор-функцию (1.34), ставящую в соответствие паре $\{t, x(t)\}$ управление $u(t) = u(t, x(t))$, будем называть законом управления или законом обратной связи.*

Определение. *Устройство, осуществляющее управление* (1.34)*, называют регулятором.*

Определение. *Присоединение данного устройства называют замыканием системы.*

Системы (1.33), (1.34) называют замкнутыми, функционирование замкнутых систем представленно на рис. 1.

Рис. 1.3:

Будем говорить, что управление (1.34) допустимо, если оно не нарушает условий существования и единственности решения (1.34). Обозначим множество допустимых управлений через U.

Наша цель из множества U выделить подмножество, на котором система (1.33) асимптотически устойчива. Эта задача возникает тогда, когда в каждый момент времени мы можем измерить отклонение от невозмущенного движения и когда все параметры известны.

Интересующий нас закон управления должен находиться из условия

$$\frac{\partial V}{\partial t} + < \frac{\partial V}{\partial x}, F(t,x) > + < \frac{\partial V}{\partial x}, G(t,x)u > = -W(t,x), \tag{1.35}$$

где V и W удовлетворяют условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

$$< G'(t,x)\frac{\partial V}{\partial x}, u > = -W(t,x) - \frac{\partial V}{\partial t} - < \frac{\partial V}{\partial x}, F(t,x) >, \tag{1.36}$$

Множество интересующих нас законов управления определяется соотношением

$$u = -\frac{\lambda}{2} G'(t,x)\frac{\partial V}{\partial x} + l(t,x), \tag{1.37}$$

где $l(t,x)$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$< G'(t,x)\frac{\partial V}{\partial x}, l(t,x) > = 0, \quad \forall (t,x) \in H_t. \tag{1.38}$$

Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial t} + < \frac{\partial V}{\partial x}, F(t,x) > - \frac{\lambda}{2} < G'(t,x)\frac{\partial V}{\partial x}, G'(t,x)\frac{\partial V}{\partial x} > = -W(t,x). \tag{1.39}$$

Сложность заключается в том, что мы не знаем функцию Ляпунова с самого начала.

Утверждение. *Множество законов стабилизации находится в виде* (1.37), *где* λ *связана с функцией Ляпунова уравнением* (1.39), *а* $l(t,x)$ *удовлетворяет* (1.38)

Замечание. *Решение задачи получено с точностью до* $l(t,x)$, *т.е. существуют регуляторы, часть блоков которых для решения задачи не нужны.*

Пример. *При некоторых предположениях задача о гашении вращения твердого тела, закрепленного в одной точке, может быть описана уравнениями*

$$\dot{x}_1 = \frac{a_2 - a_3}{a_1} x_2 x_3 + \frac{1}{a_1} u_1,$$
$$\dot{x}_2 = \frac{a_3 - a_1}{a_2} x_3 x_1 + \frac{1}{a_2} u_2,$$
$$\dot{x}_3 = \frac{a_1 - a_2}{a_3} x_1 x_2 + \frac{1}{a_3} u_3.$$

Правая часть не зависит от времени, поэтому уравнение (1.39) примет вид

$$< \frac{\partial V}{\partial x}, F(t,x) > -\frac{\lambda}{2} < G'(t,x)\frac{\partial V}{\partial x}, G'(t,x)\frac{\partial V}{\partial x} >= -W(t,x).$$

Система при отсутствии управления имеет первый интеграл

$$V(t,x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2.$$

При отсутствии управления справедливо $\dot{V}(t,x) = 0$, *найдем управление, сохраняющее это свойство:*

$$u = -\frac{\lambda}{2} G'(t,x)\frac{\partial V}{\partial x} + l(x),$$

тогда $u = -\lambda x$ *и* $W(x) = 2\lambda(x)\|x\|^2$, *где* $\lambda(x)$ *— произвольная положительная функция;* $l(x) = P(x)x$, $P(x)$ *— любая кососимметрическая матрица.*

Вектор $l(x)$ *можно использовать для компенсации нелинейности, тогда система перейдет к виду*

$$\dot{x} = -\lambda x.$$

В нашем случае система является асимптотически устойчивой и без нашего участия, поэтому функция $\lambda(t,x)$ *должна удовлетворять ограничению* $\lambda(t,x) > 0$ *и должна быть выполнена оценка*

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda \|x(t)\|^2 dt = V(x_0).$$

Таким образом имеем множество законов, на которых система асимптотически устойчива. Из данных законов можно найти оптимальные по некоторому критерию оптимальности.

Естественным образом возникает критерий оптимальности, связанный с нахождением в каждой точке минимального по модулю управления. Так как для квадрата нормы вектора u *справедливо*

$$\|u\|^2 = \|\frac{\lambda}{2} G'(t,x)\frac{\partial V}{\partial x}\|^2 + \|l(x)\|^2$$

получим, что решением данной задачи будут достигаться при выборе $l(t,x) = 0$. *Законы управления данного типа будем называть локально оптимальными.*

1.12 Оптимальная стабилизация.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = p(t, x, u), \tag{1.40}$$

где в отличие от системы (1.1) u — управление. Нас интересует задача построения закона управления $u = u(t, x)$, гарантирующего равномерную асимптотическую устойчивость системы (1.40). Будем считать заданным некоторый функционал

$$J = \int\limits_{t_0}^{\infty} L^0(t, x(t), u(t))dt, \tag{1.41}$$

где $L^0(t, x, u) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $t \geqslant 0$. Задача состоит в том, чтобы замкнутую систему сделать асимптотически устойчивой с наименьшим значением функционала (1.41).

Общие требования к функционалу (1.41):

1. Он должен как–то (удовлетворительно) оценивать качество переходного процесса.
2. Он должен предварительно оценивать затраты на управление.
3. Он должен быть достаточно простым, чтобы допускать возможность решения в замкнутой форме (то есть задача разрешается до конца и имеет прозрачный смысл).

Для решения задачи, следуя Н.Н. Красовскому, введём функцию

$$B(V, t, x, u) = \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \frac{\partial V}{\partial x}, p(t, x, u)\rangle + L^0(t, x, u).$$

Забегая вперёд, V — функция Ляпунова.

Теорема. 1.12 Красовского об оптимальной стабилизации. *Если для уравнения возмущённого движения (1.40) можно найти допускающую бесконечно малый высший предел, определённо положительную функцию Ляпунова* $V^0(t, x)$ *и вектор–функцию* $u^0(t, x)$, *удовлетворяющую условиям:*

1. $L^0(t, x, u^0(t, x))$ *является определённо положительной.*
2. *Имеет место равенство:* $B(V^0, t, x, u^0(t, x)) = 0$.
3. *Какой бы ни был вектор* u, *справедливо неравенство*

$$B(V^0, t, x, u) \ \geqslant \ 0,$$

то вектор–функция $u^0(t, x)$ *разрешает задачу (1.40)(1.41), при этом*

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} L^0(t, x(t), u^0(t))dt = \min \int\limits_{t_0}^{\infty} L^0(t, x(t), u(t))dt = V^0(t_0, x(t_0)). \tag{1.42}$$

Доказательство. Ясно, что закон управления $u^0(t,x)$ является законом стабилизации, то есть гарантирует равномерную асимптотическую устойчивость. Выбор $u^0(t,x)$ говорит о требуемых свойствах функции Ляпунова: условие 1 теоремы в сочетании с условием 2 даёт

$$V^0(t,x) = -L^0(t,x,u^0(t,x)). \qquad (\star)$$

Отсюда сразу следует, что $\int\limits_{t_0}^{\infty} L^0(t,x(t),u^0(t))dt = V^0(t_0,x(t_0))$. Осталось доказать, что на этом законе $u^0(t,x)$ интеграл достигает наименьшее значение.

Берём любой закон управления, являющийся законом стабилизации для системы (1.40). В соответствии с определением закона стабилизации он гарантирует асимптотическую устойчивость и при этом удовлетворяет условию 3, это значит, что производная $\dot{V}^0(t,x)$, вычисленная в силу уравнения (1.40), замкнутого рассматриваемым законом стабилизации, удовлетворяет условию

$$\dot{V}^0(t,x) \geqslant -L^0(t,x,u(t,x)).$$

Проинтегрируем и для этого закона управления получим

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} L^0(t,x(t),u(t))dt \geqslant V^0(t_0,x(t_0))$$

□

Вопрос: проинтегрируем равенство $(\star)$ и получим

$$\int\limits_{t_0}^{t} L^0(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau = V^0(t_0,x(t_0)) - V^0(t,x(t)),$$

почему $V^0(t,x(t)) \to 0$ при $x(t) \to 0$ для любого закона стабилизации?
Ответ: по определению бесконечно малого высшего предела $\exists$ функция ω_2 такая, что $V^0(t,x) \leqslant \omega_2(\|x\|)$. Так как из того, что $x(t) \to 0$ следует $\|x\| \to 0$, поэтому, учитывая определённую положительность функций $V^0(t,x)$ и ω_2, получим $V^0(t,x(t)) \to 0$ при $x(t) \to 0$.

Пример (*). *В теореме Ляпунова все условия (положительная определённость, бесконечно малый высший предел) рассматриваются в области H_t, т.е. $(t,x) \in H_t$. Выбираем δ, ε такими, чтобы траектория далеко не ушла. При доказательстве предыдущей теоремы не возникает вопросов об области, когда мы рассматриваем V^0 на u^0, так как V^0 — функция Ляпунова, но не может ли случиться так, что u сначала выведет нас за пределы области, в которой выполняются условия теоремы, а потом скачком упадёт в '0'?*
Вопрос: указать область выполнения условий теоремы 1.12, предусматривая нестандартное поведение закона управления.

Определение. *Функцию Ляпунова, удовлетворяющую условиям теоремы 1.12, принято называть оптимальной функцией Ляпунова.*

* С точки зрения динамического программирования V есть не что иное, как функция цены.

Рассмотрим частный случай системы (1.40):

$$\dot{x} = F(t, x) + G(t, x)u.$$

Для этой системы выпишем функционал

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[W(t, x(t)) + \mu \|u(t)\|^2 \right] dt$$

Здесь μ должно принимать компромиссное значение: если μ маленькое, то минимум функционала достигается быстро, если μ большое, то процесс очень медленно пойдёт к 0, так как роль второго слагаемого возрастает.

Из курса динамического программирования можем сразу написать закон стабилизации

$$u^0(t, x) = -\frac{G'(t, x)\frac{\partial V^0}{\partial x}}{2\mu} \qquad (*)$$

(получен дифференцированием B по u и подстановкой вместо L^0 суммы $W + \mu\|u\|^2$). При этом V^0 должно быть решением уравнения $B(V^0, t, x, u^0(t, x)) = 0$, подставим и получим уравнение

$$\frac{\partial V^0}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial V^0}{\partial t}, F(t, x) \right\rangle - \frac{1}{4\mu} \left\langle \frac{\partial V^0}{\partial x}, G(t, x)G'(t, x)\frac{\partial V^0}{\partial x} \right\rangle = -W(t, x) \qquad (**)$$

На прошлой лекции рассматривали (1.37) и (1.39):

$$u(t, x) = -\frac{\lambda}{2} G'(t, x)\frac{\partial V}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial V^0}{\partial t}, F(t, x) \right\rangle - \frac{\lambda}{2} \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, G(t, x)G'(t, x)\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle = -W(t, x)$$

Как видим, связь между $(*)$,$(**)$ и (1.37),(1.39) очень тесная, всё зависит от соотношения между λ и μ. Если $\lambda = \frac{1}{\mu}$, то уравнения $(*)$ и (1.37) совпадают, чего нельзя сказать о $(**)$ и (1.39), если же $\lambda = \frac{1}{2\mu}$, то совпадут уравнения для функции Ляпунова, но не совпадут уравнения $(*)$ и (1.37). Как сделать, чтобы и закон управления был одним и тем же, и функции Ляпунова $V^0 = V$? Тогда мы могли бы шевелить только функцию W, пошевелив её, мы могли бы сказать, что локально–оптимальный закон управления является оптимальным по отношению к функционалу:

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(W(t, x(t)) - \triangle W(t, x(t)) + \frac{1}{\lambda}\|u(t)\|^2 \right) dt,$$

где $\triangle W(t, x(t)) = \dfrac{\lambda}{4}\left\| G'(t, x)\dfrac{\partial V}{\partial x} \right\|^2$. За законом стабилизации (1.37) стоит не только функция Ляпунова, давшая этот закон, но и функционал, причём выполняются все условия теоремы 1.12. Достигается ли минимум функционала? У нас появляется возможность:

если $W \ll \triangle W$, то под интегралом может стоять определённо отрицательная функция. Тогда, если мы не будем управлять системой, то при $u = 0$ она пойдёт "вразнос" и минимизация даст нам $-\infty$. Но система должна стабилизироваться и прийти в 0, поэтому задача имеет смысл только при дополнительном условии $\lambda > 0$. При постановке задачи оптимальной стабилизации $\mu > 0$, что означало, что даже в случае $\lambda < 0$ мы можем управлять системой. Теперь же, если $\lambda < 0$, то W определённо положительна, но появляются проблемы с u. Отсюда вывод: $\lambda > 0$!

* Если кто–то скажет, как выбирать функционал в задаче оптимальной стабилизации, то мы сразу научимся строить функцию Ляпунова, и наоборот, зная W, сможем решать задачу оптимальной стабилизации, не боясь u.

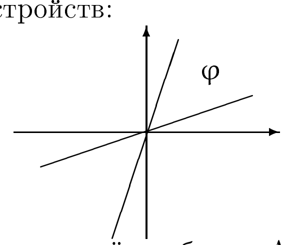
1.13 Синтез нелинейных регулируемых систем.

Рассмотрим

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(t, u), \tag{1.43}$$

где φ характеризует исполнительные устройства (например, устройство, которое отклоняет руль).

Когда выбираем линейный закон $u = kx$, то возникает проблема исполнительных устройств:



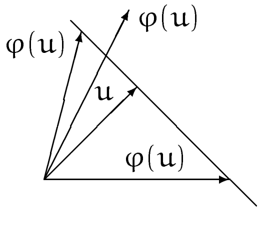
пусть $\varphi_k(t, u_k)$ обладает тем свойством, что эта характеристика лежит в каком–то углу. Тогда исполнитель вносит такой вклад в задачу стабилизации, и при прекрасных значениях управления система становится неустойчивой.

И есть ещё проблема Айзермана: если известно, что в каком–то угле при любом линейном законе φ система асимптотически устойчива, то следует ли отсюда асимптотическая устойчивость нелинейной системы? Нет (был приведён пример).

Предположим, что функция φ удовлетворяет условию

$$\langle u, u\rangle \leqslant \langle u, \varphi(t, u)\rangle \text{ для } \forall u,\ \forall t. \tag{1.44}$$

Оно означает, что исполнитель на выходе выработает всю верхнюю часть, как показано на рисунке.



Будем решать задачу по классической схеме: построим множество всех законов для линейной системы, а потом выделим среди них те, которые будут законами стабилизации для нелинейной системы.

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = F(t, x) + G(t, x)\varphi(t, u) \tag{1.45}$$

Видим, что закон управления —

$$u = -\frac{\lambda}{2} G'(t,x)\frac{\partial V}{\partial x} + l(t,x), \tag{1.46}$$

с функцией цены

$$\frac{\partial V}{\partial t} + < \frac{\partial V}{\partial x}, F(t,x) > -\frac{\lambda}{2} < G'(t,x)\frac{\partial V}{\partial x}, G'(t,x)\frac{\partial V}{\partial x} >= -W(t,x). \tag{1.47}$$

при $\lambda > 0$ гарантирует закон оптимальной стабилизации. Есть два варианта метода Гаусса: метод наименьших квадратов и принцип наименьшего принуждения, состоящий в следующем: "движение системы материальных точек, подверженных любым влияниям и связям, должно происходить с наименьшим принуждением", то есть с наименьшим отклонением от того движения, которое совершали бы эти точки, если бы они были свободны, конечно, при условии $\lambda > 0$.

Утверждение. *Закон управления (1.46), определяемый функцией Ляпунова (1.47), является законом стабилизации для системы (1.45) при любой функции φ, удовлетворяющей условию (1.44).*

Доказательство. Возьмём функцию Ляпунова и рассмотрим её производную в силу системы (1.45). После очевидных преобразований получаем

$$\dot V(t,x) \geqslant -W(t,x).$$

В самом деле, в силу уравнения имеем

$$\begin{aligned}\dot V(t,x) &= -W(t,x) + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, G\varphi\left(t, -\frac{\lambda}{2}G'\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right\rangle + \frac{\lambda}{2}\left\|G'\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2 = \\ &= -W(t,x) + \left\langle G'\frac{\partial V}{\partial x}, \varphi\left(t, -\frac{\lambda}{2}G'\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right\rangle + \frac{\lambda}{2}\left\|G'\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2 \geqslant -W(t,x),\end{aligned}$$

т.к. силу (1.44) $\left\langle G'\frac{\partial V}{\partial x}, \varphi\left(t, -\frac{\lambda}{2}G'\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right\rangle + \frac{\lambda}{2}\left\|G'\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2 \geqslant 0.$

□

Таким образом нужно искать линейные законы типа (1.46), и самое главное — искать законы надо для линейной системы

$$\dot x = Ax + Bu$$

Функция Ляпунова $V = \|x\|^2_L$. В соответствии с (1.46) управление

$$u = -\lambda B'Lx.$$

Из (1.47) получаем

$$LA + A'L - 2\lambda LBB'L = -Q \tag{$\diamond$}$$

Наша задача — разработать схему построения управлений заданного типа.

Вопрос: когда определяемая ($\diamond$) матрица будет определённо положительной?

Вопрос: как выбирать матрицу Q хотя бы в рамках тех оценок, о которых мы говорили в задачах об устойчивости?

Рассмотрим уравнение (1.43)

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(t, u)$$

$$u = -\lambda B'Lx \tag{1.48}$$

$$LA + A'L - 2\lambda LBB'L = -Q \tag{1.49}$$

Решение нелинейной задачи синтеза (1.43), (1.48) с функцией $\varphi(t, u)$, удовлетворяющей следующему условию:

$$\langle u, \varphi(t, u)\rangle \geqslant \langle u, u\rangle$$

сводится к решению матричного уравнения Рикатти (1.49). Нас волнует вопрос о выборе положительно определенной матрицы Q.

Уравнению (1.49) отвечает интегральная оценка:

$$\int_{t_0}^{\infty} \|x(t)\|_Q^2 dt \leqslant \|x_0\|_L^2$$

Решение задачи о стабилизации нашей системы с экспоненциальной оценкой сводится к решению уравнения:

$$LA + A'L - 2\lambda LBB'L = -\alpha L \tag{1.50}$$

В случае уравнения (1.50) замкнутая система (1.43), (1.48) будет ассимтотически устойчива с оценкой:

$$\|x(t)\|_L^2 \leqslant \|x_0\|_L^2 e^{-\lambda(t-t_0)}, t \geqslant t_0$$

Для линейной системы ($\varphi(t, u) = u$) имеет место знак равенства.

В уравнении (1.49) надо было указать не только матрицу Q, но и параметр λ. В уравнении (1.50) мы, не уменьшая общности рассуждений, полагаем $\lambda = 1$. Тогда из (1.50) получим:

$$LA + A'L - 2LBB'L = -\alpha L \tag{1.51}$$

потому что от λ закон управления не зависит:

$$u = -B'Lx \tag{1.52}$$

Уравнение (1.51) мы будем называть алгебраическим уравнением Бернулли. Вся неопределенность сводится в этом случае лишь к выбору параметра α.

Уравнение (1.51) можно свести к решению линейного уравнения. Для этого умножим левую и правую часть уравнения (1.51) на L^{-1}:

$$AL^{-1} + L^{-1}A' - 2BB' = -\alpha L^{-1} \tag{1.53}$$

Решать линейное уравнение (1.53) гораздо проще.

Уравнение (1.53) можно интерпретировать как некоторое уравнение Ляпунова для какой-то линейной системы. Эту систему можно записать так:

$$L^{-1}A_\alpha + A'_\alpha L^{-1} = -2BB'$$

или

$$\dot{z} = A_\alpha z \tag{1.54}$$

где $A_\alpha = -\frac{\alpha}{2}I - A'$

Если нулевое решение (1.54) ассимптотически устойчиво, то тогда мы имеем дело с матричным уравнением Ляпунова.

И интегральная оценка:

$$2\int_{t_0}^{\infty} \|z(t)\|^2_{BB'}\,dt = \|z_0\|^2_{L^{-1}}$$

В общем случае BB' не является определенно положительной. В таком случае можно применить теорему **??**. Тогда возникает естественный вопрос: можно ли добиться того, чтобы из $\|Bz(t)\| \to 0$ следовала бы сходимость по $z(t)$. В соответствии с теоремой **??** многообразие $Bz = 0$ не должно содержать целых траекторий системы (1.54).

В данном случае из $\|Bz(t)\| \to 0$ следует $\|z(t)\| \to 0$ тогда, когда система (1.54) является наблюдаемой по сигналу $y = Bz$.

Если пара BA' наблюдаема, то пара AB должна быть полностью управляема. Таким образом, мы приходим к требованию ассимптотической устойчивости системы (1.54) и к условию:

$$rang(B, AB, ..., A^{n_x-1}B) = n_x$$

Пример (маятник).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + \varphi(t, u) \end{aligned}$$

При отсутствии управления все определяется значением параметра a.

Задача: найти закон стабилизации, который гарантирует ассимптотическую устойчивость при любой функции $\varphi(t, u)$, удовлетворяющей условию:

$$u\varphi(t, u) \geqslant u^2$$

Необходимо найти закон (1.52), т.е. решить уравнение (1.53).

Решая уравнение (1.53) окончательно получим:

$$L = \begin{bmatrix} f(a,\alpha) & \frac{\alpha^2}{2} \\ \frac{\alpha^2}{2} & \alpha \end{bmatrix}$$

где $f(a,\alpha)$ - *"этого элемента я не помню".*

Тогда для закона управления получаем:

$$u = -B'Lx = -\frac{\alpha^2}{2}x_1 - \alpha x_2$$

Заметим, что он не зависит от a, *т.е. стабилизатору все равно, какой маятник стабилизировать ? На самом деле, здесь* u *имеет смысл лишь при* $L > 0$ *(вот, где возникает зависимость от* a*).*

Глава 2

Устойчивость и сходимость дискретных процессов

2.1 Процессы с дискретным временем.

$$x(k+1) = p(k, x(k)) \tag{2.1}$$

здесь k – дискретное время, $k \geqslant k_0$, где k_0 – некоторый заданный начальный момент времени.

Пример.

$$x(k+1) = r(1 - 2|x(k) - \frac{1}{2}|) \tag{2.2}$$

Нас интересуют особые точки системы (2.2) и устойчивость системы в этих точках.

Особые точки: 0, $\frac{r+2}{2r+1}$.

Задача: при каких значениях параметра r, *по каким переменным система будет ассимптотически устойчивой.*

Если $r = 1$, *как ведут себя траектории системы ?*

$$x_0 = \frac{1}{2} \to 1 \to 0$$

$$x_0 = \frac{1}{4} \to \frac{1}{2} \to 1 \to 0$$

$$x_0 = \frac{1}{8} \to \frac{1}{4} \to \frac{1}{2} \to 1 \to 0$$

$$\ldots$$

Получается, что сколь угодно близко к нулю мы бы ни брали начальную точку, все равно система будет проходить через точку $x = 1$. *Таким образом, особая точка* $x = 0$ *неустойчива при* $r = 1$.

Вопрос: можно ли установить экспериментально, что процесс не будет сходится в начало координат ?

2.2 Аналоги классических теорем

Суть пункта состоит в том, что надо взять уравнение (2.1) и в предположении, что $z = x$ сформулировать все предыдущие теоремы. То есть сформулировать их дискретные аналоги.

2.3 Устойчивость по заданным ограничениям

Пусть $z = q(k, x)$ - некоторая, заданная вектор-функция. Не уменьшая общности рассуждения, будем считать, что на интересующем нас невозмущенном движении $x_*(k) = x(k, k_0, x_0^*)$ выполнено $q(k, x_*(k)) = 0$.

Определение. *Система (2.1) называется устойчивой по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что выполнение неравенства $\|x(k_0) - x_0^*\| \leqslant \delta$ влечет за собой выполнение условия $\|q(k, x(k))\| \leqslant \varepsilon$ при $k > k_0$*

Определение. *Система (2.1) называется z-устойчивой , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ:*

$$\|q(k_0, x_0)\| \leqslant \delta \tag{2.3}$$

$$\|q(k, x(k))\| \leqslant \varepsilon \tag{2.4}$$

при $k > k_0$

В данном случае невозмущенные траектории не участвуют в определении в явном виде.
$q(k_0, x_0) = x_0 - x_0^*$ - определение устойчивости по Ляпунову. Устойчивость по части переменных запишется в следующем виде: $q(k_0, x) = x$ $q(k, x) = y = (x_0, \dots, x_m)'$
Будем рассматривать $V(k, x) \leqslant 0$. Вместе с этой функцией будем рассматривать монотонно ограниченные функции $\omega_i \in \Omega$. Эти функции обращаются в ноль в начале координат и монотонно растут с ростом переменных. При этом учитываем следующее неравенство:

$$V(k+1, p(k, x)) \leqslant V(k, x) \quad k \geqslant k_0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

где $V(k, x)$ - неотрицательная функция, то есть, для любой траектории справедливо: $V(k, x) \leqslant V(k_0, x_0)$
Далее, потребуем, чтобы функция была монотонна, и для нее выполнялись условия:

$$\omega_1(\|q(k, x)\|) \leqslant V(k, x) \tag{2.6}$$

$$\omega_2(\|q(k_0, x)\|) \geqslant V(k_0, x) \tag{2.7}$$

Теорема. *Система (2.1) z-устойчива, если существует функция $V(k, x)$, удовлетворяющая неравенствам (2.5), (2.6) в области –– и неравенству (2.7) в области ––*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такие, что: $\omega_2(\delta) \leqslant \omega_1(\varepsilon)$. Тогда, при выборе δ на любой траектории, начинающейся в области (2.3) имеем:

$$\omega_1(\|q(k, x(k))\|) \leqslant V(k, x(k)) \leqslant V(k_0, x_0) \leqslant \omega_2(\delta) \leqslant \omega_1(\varepsilon)$$

следовательно, для любой траектории, начинающейся в области (2.3), выполняется неравенство (2.4), а значит, система z-устойчива. □

2.4 Асимптотическая z-устойчивость. z-устойчивость и z-сходимость

Вернемся к вопросу о том, в какой области должны выполняться условия теоремы 2.1 (2.5), (2.6), (2.7). Все теоремы Ляпунова содержат в своих доказательствах оценку вида:

$$V(k, x(k)) \leq V(k_0, x_0),$$

поэтому имеет смысл рассматривать такие условия:

$$\mathcal{M}_V(k) = \{x | V(k, x) \leq C_V\}$$

Для того чтобы (2.5), (2.6) выполнялись в области $\mathcal{M}_V$ $\forall k > k_0$, константа C_V должна удовлетворять условию:

$$C_V > \inf V(k, x) \quad \forall k,$$

так как в противном случае множество $\mathcal{M}_V = \emptyset$. При выполнении неравенства $C_V > \inf V(k, x)$ $\forall k$ $\mathcal{M}_V \neq \emptyset$, и теорема начинает работать.

Задача. *Предлагается рассматривать такую область, в которой следует проверять условие (2.7):*

$$Q(k_0) = \{x | \|q(k_0, x)\| \leq d_V, d_V = \text{const} > 0\}$$

Ответьте на вопрос, достаточно ли ограничиться рассмотрением только области $\mathcal{M}_V$?

Теорема. *Дискретный процесс (2.1) асимптотически z-устойчив, если существует неотрицательная функция Ляпунова $V(k, x)$, удовлетворяющая неравенству:*

$$V(k+1, p(k, x)) \leq V(k, x) - w_1(\|q(k, x)\|) \quad \forall x \in \mathcal{M}_V(k), k \geq k_0 \tag{2.8}$$

$$V(k_0, x) \leq w_2(\|q(k_0, x)\|) \quad \forall x \in Q(k_0) \tag{2.9}$$

Доказательство. По определению асимптотическая z-устойчивость есть z - устойчивость и z-сходимость.

Z-устойчивость дискретного процесса (2.1) следует из теоремы 2.1.

Требуется доказать только z-сходимость, то есть нужно показать, что при некотором δ_0 любая траектория системы, начинающаяся в области

$$\|q(x(k_0, x_0))\| \leq \delta_0, \tag{2.10}$$

будет удовлетворять условию:

$$\|z(k)\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{2.11}$$

Выбирая δ_0 из условия:

$$w_2(\delta_0) \leq C_V$$

и потребовав дополнительно, чтобы

$$\delta_0 \leq d_V,$$

получим, что для каждой траектории, начинающейся в области (2.10), (2.11), справедлива оценка:

$$V(k, x(k)) \leq V(k_0, x_0) \tag{2.12}$$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} w_1(\|z(k)\|) \leq V(k_0, x_0) \tag{2.13}$$

Поэтому всякое предположение, что $\|z(k)\| \not\to 0$ при $k \to \infty$ требует существование последовательности $z(k_1)$, $z(k_2)$, ..., удовлетворяющей условию: $\|z(k_s)\| > \eta$, $s \geq 1$. Это сразу противоречит оценке (2.13), так как

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} w_1(\|z(k)\|) \geq \sum_{s=1}^{\infty} w_1(\|z(k_s)\|) = \infty$$

□

Пример. *В теореме, в отличие от теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, в отличие от теоремы Четаева об асимптотической устойчивости по части переменных, не требуется, чтобы функция Ляпунова на траекториях системы стремилась к нулю, то есть*

$$V(k, x(k)) \to 0 \quad k \to \infty$$

Следовательно, можно сформулировать признак асимптотической устойчивости, ужесточив требования к самой функции Ляпунова и ослабив требования к неравенству (2.8).

2.5 Условия равномерной устойчивости

Определение. *Будем говорить, что процесс (2.1) z-устойчив равномерно по k_0, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что выполнение неравенства*

$$\|q(k_0, x_0)\| \leq \delta \quad \forall k_0 \tag{2.14}$$

влечет за собой выполнение неравенства:

$$\|z(k)\| \leq \varepsilon \quad \textit{при} \quad k > k_0$$

Замечание. *В отличие от z-устойчивости, в определении которой $\delta = \delta(k_0, \varepsilon)$, здесь $\delta = \delta(\varepsilon)$.*

Условие (2.11) эквивалентно такому условию:

$$\|z(k)\| \leq \eta \quad \forall k \geq k_0 + T_k \tag{2.15}$$

В этом определении $T_k = T_k(\eta, k_0, x_0)$.

Будем говорить, что условие (2.11) выполняется равномерно по x_0, если $T_k = T_k(\eta, k_0, \delta_0)$.

Будем говорить, что условие (2.11) выполняется равномерно по k_0 и x_0, если $T_k = T_k(\eta, \delta_0)$.

Теорема. *Пусть* $V(k,x)$ *— неотрицательная функция Ляпунова, удовлетворяющая в области* $x \in \mathcal{M}_V(k)$, $k \geq 0$ *оценкам:*

$$w_1(\|q(k,x)\|) \leq V(k,x) \leq w_2(\|q(k,x)\|), \tag{2.16}$$

$$V(k+1, p(k,x)) \leq V(k,x) - \gamma(k) w_3(\|q(k,x)\|), \tag{2.17}$$

где $\gamma(k)$ *— неотрицательная функция. Тогда процесс (2.1):*

а) z*-устойчив равномерно по* k_0*;*

б) *асимптотически* z*-устойчив равномерно по* x_0*, если*

$$\sum_{k=k_0}^{s} \gamma(k) \to \infty \quad s \to \infty \tag{2.18}$$

в) *асимптотически* z*-устойчив равномерно по* k_0 *и* x_0*, если условие (2.18) выполняется равномерно по* k_0.

Поясним сказанное.

(2.18) означает, что $\forall R > 0 \ \exists K(k_0, R)$:

$$\sum_{k=k_0}^{k_0+K(k_0,R)} \gamma(k) > R.$$

Если в этом определении можно взять $K = K(R)$, то получим выполнение условия (2.18) равномерно по k_0.

Доказательство. Утверждение а) совершенно понятно, потому что правая часть двойного неравенства (2.16) заложена в начальном условии.

Имеет место следующая оценка:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma(k) w_3(\|z(k)\|) \leq V(k_0, x_0).$$

Поэтому если $\|z(k)\| \not\to 0$, то не будет стремиться к нулю и функция Ляпунова. Пусть $V(k,x) \to v_0$ при $k \to \infty$ и $v_0 \neq 0$. Это означает, что

$$w_2(\|q(k, z(k))\|) \geq v_0 \quad \forall k \geq k_0$$

А значит,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma(k) w_3(\|z(k)\|) \geq \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma(k) w_1(w_2(v_0)).$$

Полученное противоречие доказывает б). Справедливость в) следует из равномерности выполнения условия (2.18). $\square$

Пример. *При условии* $\gamma(k) \geq \gamma_0$ $T_k(\eta)$ *выписать в явном виде. Попытка привести подобную формулу для непрерывного вида была, как ранее отмечалось, не совсем правильной.*

Нужно очень хорошо понимать следующее. Если в момент k_0 *имеем в качестве ограничения сферу* $\|q(k_0, x_0)\| < \delta_0$*, то когда запустим процесс, то сразу получим множество, содержащее начальное.*

Интересно, что происходит в момент $k_0 + \hat{T}_k$*. По определению траектория должна попадать в сферу радиуса* η *и там оставаться. В то же время, мы не можем гарантировать, что первая попавшаяся траектория попадет в эту сферу. Мы можем гарантировать только, что если впишем в эту сферу множество линий уровня функции Ляпунова, то траектории, начавшиеся внутри этого множества линий уровня, не выйдут за пределы сферы радиуса* η.

Ответ необходимо получить в терминах w_1, w_2, w_3 *и* η.

В условиях теоремы лежит оценка:

$$w_1(\|q(k,x)\|) \leq V(k,x) \leq w_2(\|q(k,x)\|)$$

Оценка снизу функции в данном случае есть условие, напоминающее знакоопределенность, оценка сверху — бесконечно малый высший предел.

Определение. *Неотрицательную функцию Ляпунова, удовлетворяющую неравенству:*

$$V(k,x) \leq w_2(\|q(k,x)\|)$$

в области $x \in \mathcal{M}_V(k)$, $k \geq k_0$ *будем называть функцией, допускающей сильный бесконечно малый высший предел.*

Определение. *Будем говорить, что неотрицательная функция Ляпунова* $V(k,x)$ *допускает слабый бесконечно малый высший предел, если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, k_1: $V(k,x) \leq \varepsilon$ *при всех* $\|q(k,x)\| \leq \delta$, $k \geq k_1$

Пример.

$$V(k,x) = \|q(k,x)\|^2 + \kappa(k)$$

Эта функция допускает сильный бесконечно малый высший предел тогда и только тогда, когда $\kappa(k) = 0$ $\forall k$ *и слабый бесконечно малый высший предел, если* $\kappa(k) \geq 0$ *и* $\kappa(k) \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Пример. *При выполнении теоремы 2.3 функция Ляпунова допускает сильный бесконечно малый высший предел. Что произойдет с асимптотической устойчивостью процесса, если требование сильного бесконечно малого высшего предела заменить на слабый бесконечно малый высший предел?*

2.6 Сходимость и устойчивость в большом

Определение. *Будем говорить, что процесс (2.1)* z*-сходится в большом, если* $\|z(k)\| \to 0$ *при любом начальном состоянии из области*

$$\|q(k_0, x_0)\| \leq \Delta \tag{2.19}$$

Определение. *Процесс называется асимптотически z-устойчивым в большом, если он z-устойчив и z-сходится в большом.*

Теорема. *Процесс (2.1) z-сходится в большом, если ему отвечает неотрицательная функция Ляпунова, удовлетворяющая условию:*

$$V(k+1, p(k,x)) \le V(k,x) - w_1(\|q(k,x)\|) \quad \forall x \in \mathcal{M}_V(k), k \ge k_0$$
$$\sup\{V(k_0,x) | \|q(k_0,x)\| \le \Delta\} \le C_V$$

Доказательство.

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} w_1(\|z(k)\|) \le V(k_0, x_0) \le C_V$$

Следовательно, $\|z(k)\| \to 0$ при $k \to \infty$. □

Замечание. *Из сходимости, как известно, не следует устойчивость. В условиях рассмотренной теоремы нет ничего, что напоминало бы условие устойчивости и дополнительный интерес представляет то, что в условиях теоремы нет ни одного бесконечно малого высшего предела.*

Теорема. *Пусть $V(k,x) \geqslant 0$ — функция Ляпунова, удовлетворяющая при всех $x \in M_V(k)$, $k \geqslant 0$, условиям*

$$\omega_1(\|q(k,x)\|) \leqslant V(k,x), \tag{2.20}$$
$$V(k+1, p(k,x)) \leqslant V(k,x) - \gamma(k)\omega_3 w(\|q(k,x)\|), \tag{2.21}$$

где ряд $\gamma(k)$ расходится:

$$\sum_{k=k_0}^{s} \gamma(k) \to \infty, \quad s \to \infty; \tag{2.22}$$

кроме того,

$$\sup\{V(k,x) \mid \|q(k,x)\| \leqslant \Delta,\ k \geqslant 0\} \geqslant C_V. \tag{2.23}$$

Тогда:

1. *Процесс (2.1) сходится в большом равномерно по x_0, если функция Ляпунова $V(k,x)$ допускает слабый бесконечно малый высший предел.*

2. *Процесс (2.1) асимптотически z-устойчив в большом равномерно по x_0, если функция Ляпунова $V(k,x)$ допускает сильный бесконечно малый высший предел.*

3. *Процесс (2.1) сходится (асимптотически z-устойчив) в большом равномерно по k_0 и x_0, если функция Ляпунова $V(k,x)$ допускает слабый (соответственно, сильный) бесконечно малый высший предел, а условие (2.22) выполняется равномерно по k_0.*

Доказательство. Сходимость следует из оценки

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma(k)\omega_3(\|z(k)\|) \leqslant V(k_0, x_0),$$

асимптотическая z-устойчивость — из сильного бесконечно малого высшего предела, равномерность по k_0 — из равномерности (2.22).

Строгое доказательство состоит в выписывании оценок, при которых

$$\|z(k)\| \leqslant \eta, \quad k \geqslant k_0 + k_\eta.$$

При $k_\eta = k_\eta(k_0, \Delta, \eta)$ сходимость будет равномерной по $\|x_0\| \leqslant \Delta$, а при $k_\eta = k_\eta(\Delta, \eta)$ — равномерной по x_0, k_0. □

2.6.1 Устойчивость и сходимость в целом

Как и раньше, рассматривается система

$$x(k+1) = p(k, x), \tag{2.1}$$

$$z = q(k, x). \tag{2.2}$$

Определение. *Система* (2.1) *асимптотически* z*-устойчива в целом, если она* z*-устойчива, и*

$$\|z(k)\| \to 0, \quad k \to \infty, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}, \tag{2.24}$$

где

$$z(k) = q(k, x(k, k_0, x_0)).$$

Задача. *Сформулировать все соответствующие определения, как в непрерывном случае.*

Определение. *Система* (2.1) *равномерно асимптотически* z*-устойчива в целом по* x_0, k_0*, если*

$$\forall \Delta > 0, \eta > 0 \quad \exists k_\eta : \quad \forall k_0, x_0 : \|q(k_0, x_0)\| \leqslant \Delta : \quad \|z(k)\| \leqslant \eta, \quad \forall k \geqslant k_0 + k_\eta.$$

Можно было бы просто переформулировать теорему (2.5), потребовав выполнения ее условий при любых $\Delta > 0$, и таким образом получить условия сходимости и асимптотической устойчивости в целом. Однако, если функция Ляпунова $V(k, x)$ допускает бесконечно большой низший предел, то можно ослабить (2.21) и заменить его на следующее:

$$V(k+1, p(k, x)) \leqslant V(k, x) - \gamma(k)\omega_0(q(k, x)), \tag{2.25}$$

где ω_0 — любая определенно положительная функция.

Задача. *Самостоятельно сформулировать и доказать теорему 2.6.*

2.6.2 Построение устойчивых процессов

Рассмотрим управляемую систему

$$x(k+1) = p(k, x(k), u(k)), \tag{2.26}$$

где $u(k)$ — вектор управления, выбираемый в соответствии с законом управления

$$u(k) = \tilde{u}(k, x(k)). \tag{2.27}$$

Нас интересует построение законов управления (2.27), гарантирующих сходимость или устойчивость системы (2.26), (2.27).

Основным соотношением для определения управления, как и в непрерывном случае, будет

$$V(k+1, p(k,x,u)) = V(k,x) - W(k,x). \tag{2.28}$$

Накладывая на функции V, W определенные требования, будем получать ту или иную сходимость.

В отличие от непрерывного времени уравнение (2.28) в любом случае будет нелинейным по u, даже если исходная система линейна, поэтому непосредственного выражения для u получить невозможно.

В общем случае (2.28) определяет не единственный закон управления, поэтому следует предъявить дополнительные требования, например, минимизации нормы $\|u\|^2 = Z$. Запишем функцию Лагранжа для этой задачи:

$$\mathcal{L}(u,\lambda) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda(V(k+1, p(k,x,u)) - V(k,x) + W(k,x)).$$

Необходимое условие минимума:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = u + \lambda \frac{\partial V(k+1, p(k,x,u))}{\partial u} = 0. \tag{2.29}$$

Можно также минимизировать левую часть уравнения (2.28) (то есть построить закон, оптимальный по отношению к функции Ляпунова), тогда необходимым условием минимума будет

$$\frac{\partial V(k+1, p(k,x,u))}{\partial u} = 0. \tag{2.30}$$

Заметим, что при $\lambda \to \infty$ условие (2.29) вырождается в (2.30).

2.6.3 Функция Ляпунова и оптимизационные процессы

Будем рассматривать частный случай системы (2.1):

$$x(k+1) = x(k) + u(k). \tag{2.31}$$

В качестве примера выберем

$$z = Hx - g, \tag{2.32}$$

$$V(x) = \|Hx - g\|^2. \tag{2.33}$$

По формуле (2.29) найдем закон управления и функцию W:

$$u = -\lambda(I + \lambda H'H)^{-1}H'(Hx - g), \tag{2.34}$$

$$W(x) = \left\|H'(Hx - g)\right\|_Q^2, \tag{2.35}$$

$$Q = \lambda(I + \lambda H'H)^{-1}(2I + \lambda H'H)(I + \lambda H'H)^{-1}. \tag{2.36}$$

При $\lambda > 0$ процесс сходится по переменной

$$\hat{z} = H'(Hx - g),$$

хотя уравнение $Hx = g$ может и не иметь решения. Таким образом, мы применили вышеизложенный метод к задаче, которая может не иметь решения, и получили решение, соответствующее псевдорешению уравнения $Hx = g$.

Глава 3

Векторные функции Ляпунова.

3.1 Метод сравнений.

Этот метод является одним из самых применимых методов, использующих функции Ляпунова. Сначала вместо исходной системы рассматривается вспомогательная (упрощенная, эталонная, модельная) система. Для этой системы строится или хотя бы доказывается существование функции Ляпунова, удовлетворяющей той или иной теореме об устойчивости с некоторым "запасом прочности". Затем найденная функция Ляпунова используется для исследования основной системы. Если "запаса прочности"хватает, то о свойствах исходной системы судят по свойствам модельной системы. Поясним эту схему на простейшей (с точки зрения постановки задачи) системе с непрерывным временем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p(t,x) \\ z &= x. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Нас интересует устойчивость нулевого решения системы. Предположим, что вместо системы (3.1) мы можем рассмотреть вспомогательную систему

$$\dot{x} = p_0(t,x), \tag{3.2}$$

для которой мы можем найти функцию Ляпунова $V(t,x)$. То есть существует функция Ляпунова для системы (3.2), удовлетворяющая оценкам, характерным для квадратичных форм :

$$\begin{gathered} C_1\|x\|^2 \leqslant V(t,x) \leqslant C_2\|x\|^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, p_0(t,x) \right\rangle \leqslant -C_3\|x\|^2 \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leqslant C_4\|x\|. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Надо сформулировать условия экспоненциальной устойчивости исходной системы, если известно, что для любого t и произвольного x из пространства состояний системы выполняется

$$\|p(t,x) - p_0(t,x)\| \leqslant \beta\|x\|^m, \tag{3.4}$$

где $\beta > 0$, $m \geqslant 1$ — числа. Следует ли из экспоненциальной устойчивости системы (3.2) экспоненциальная устойчивость системы (3.1) в целом, в большом, в малом?

Для p справедливо

$$V_t + \langle V_x, p\rangle = V_t + \langle V_x, p_0\rangle + V_x p - p_0 \leqslant -C_3\|x\|^2 + C_4\beta\|x\|^{m+1}.$$

Рассмотрим $m > 1$. Тогда в окрестности нуля

$$C_4\beta\|x\|^{m+1} = o\left(\|x\|^2\right).$$

Таким образом, получаем

$$V_t + \langle V_x, p\rangle \leqslant -C_5\|x\|^2,$$

то есть исходная система при $m > 1$ будет экспоненциально устойчивой в малом.
Рассмотрим теперь $m = 1$. Для упрощенной системы (3.2) выполнено

$$\|x(t)\|^2 \leqslant \frac{C_2}{C_1}\|x(0)\|^2 e^{-\frac{C_3}{C_2}t}$$

Для системы (3.1) соответственно будет

$$\|x(t)\|^2 \leqslant \frac{C_2}{C_3}\|x(0)\|^2 e^{-\frac{C_3 - C_4\beta}{C_2}t}.$$

Тогда если $C_4\beta < C_3$, а $m = 1$, то мы получаем, что исходная система (3.1) устойчива в целом.
Для выяснения свойства экспоненциальной устойчивости в большом исходной системы рассмотрим цепочку неравенств :

$$V_t + \langle V_x, p\rangle \leqslant -C_3\|x\|^2 + C_4\beta\|x\|^{m+1} = -\|x\|^2\left(C_3 - C_4\beta\|x\|^{m-1}\right).$$

Потребуем для начального состояния системы выполнения неравенства $\|x(0)\| \leqslant \Delta$ и обозначим

$$\Gamma = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\Delta.$$

Тогда если $C_3 - C_4\beta\Gamma > 0$ и $m \geqslant 1$, то исходная системы будет экспоненциально устойчива в большом. Заметим, однако, что это условие может быть ослаблено.

Пример. *Рассмотрим случай, когда $p_0 = -x^3$. Тогда эталонная система (3.2) будет равомерно асимптотически устойчива в целом ("равномерно это значит по начальному значению и по моменту времени). Можно ли к правой части эталонной системы добавить очень маленькое слагаемое, чтобы полученная система (3.1) была бы асимпотически устойчива хотя бы в малом? Нет, нельзя. Для любого, сколь угодно малого $\delta_0 > 0$ исходная система*

$$\dot{x} = -x^3 + \delta_0 x$$

сразу будет неустойчивой.

3.2 Устойчивость взаимосвязанных систем.

Мы будем рассматривать системы вида

$$\dot{x}_i = p_i(t, x_i) + h_i(t, x_1, \dots, x_l), \qquad i = \overline{1, l}, \quad \text{где} \tag{3.5}$$

$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ — вектор, характеризующий состояние i-ой подсистемы, входящей в (3.5), а h_i — вектор-функция, отвечающая за перекрестные связи между этими подсистемами.
Мы рассматриваем системы вида (3.5) отдельно от систем вида (3.1), во-первых, потому, что при больших l состояние системы становится просто огромным, а во-вторых, потому, что перекрестные связи между подсистемами часто бывают неизвестными.

Будем рассматривать систему (3.5) при предположениях, что

$$\|h_i(t, x_1, \dots, x_l)\| \leqslant \sum_{i \neq j} h_{ij} \|x_j\|, \tag{3.6}$$

где величины h_{ij} — заданы. Также предположим, что каждая подсистема, рассматриваемая изолированно

$$\dot{x}_i = p_i(t, x_i)$$

является экспоненциально устойчивой. Это означает, что для нее существует функция Ляпунова, удовлетворяющая оценкам, характерным для квадратичных форм :

$$\begin{gathered} C_{i1}\|x_i\|^2 \leqslant V_i(t, x_i) \leqslant C_{i2}\|x_i\|^2 \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V_i}{\partial x}, p_i(t, x_i) \right\rangle \leqslant -C_{i3}\|x_i\|^2 \\ \left\| \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right\| \leqslant C_{i4}\|x_i\|. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Требуется сформулировать условия, при выполнении которых из экспоненциальной устойчивости каждой из подсистем (3.5) следует экспоненциальная устойчивость самой метасистемы (3.5).

Лемма. *Пусть* $a > 0$, $b \geqslant 0$. *Тогда для всех* $z \geqslant 0$ *верно*

$$-az^2 + bz \leqslant -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a}. \tag{3.8}$$

Справедливо неравенство

$$\dot{V}_i(t, x) \leqslant -C_{i3}\|x_i\|^2 + C_{i4}\|x_i\| \cdot \|h_i(t, x_1, \dots, x_l)\|.$$

Далее, используя лемму, получаем:

$$\dot{V}_i(t, x) \leqslant -\frac{C_{i3}}{2}\|x_i\|^2 + \frac{C_{i4}^2\|h_i(t, x_1, \dots, x_l)\|^2}{2C_{i3}}.$$

Оценим $\|h_i(t, x_1, \dots, x_l)\|$:

$$\|h_i\|^2 \leqslant \left(\sum h_{ij}\|x_j\|^2 \right)^2 \leqslant \sum_{i \neq j} h_{ij}^2 \sum_j \|x_j\|^2 \leqslant \sum_{i \neq j} h_{ij}^2 \sum_j \frac{1}{C_{j1}} V_j(t, x_j).$$

Окончательно получаем:

$$\dot{V}_i(t, x_i) \leqslant -\frac{C_{i3}}{2C_{i2}} V_i(t, x_i) + \sum_{j \neq i} \beta_{ij} V_j(t, x_j),$$

где

$$\beta ij = C_{i4} \sum_{j \neq i} \frac{h_{ij}^2}{2C_{j1} C_{i3}}.$$

Теорема (Бейли). *Система (3.5) при связях, удовлетворяющих (3.6), экспоненциально устойчива в целом, если нулевое решение системы сравнения*

$$\dot{\rho}_i = -\frac{C_{i3}}{2C_{i2}} \rho_i + \sum_{j \neq i} \beta ij \rho_j \tag{3.9}$$

асимптотически устойчиво.

Мы свели исследование сложной нелинейной системы (3.5) с большим числом состояний и неизвестных связях к решению простой системы (3.9) с постоянными коэффициентами — исследованию ее на асимптотическую устойчивость.
Если вместо (3.7) рассмотреть ограничения

$$C_{i1} \|x_i\|^2 \leqslant V_i(t, x_i) \leqslant C_{i2} \|x_i\|^2$$
$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V_i}{\partial x}, p_i(t, x_i) \right\rangle \leqslant -\alpha_i V_i(t, x_i)$$
$$\left\| \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right\| \leqslant C_{i4}^2 V_i(t, x_i),$$

то система (3.9) имела бы вид

$$\dot{\rho}_i = -\alpha_i \rho_i + \sum_{j \neq i} \beta ij \rho_j.$$

Чем плоха теорема Бейли? Предположим, что связи между подсистемами исчезли, то есть $\beta ij = 0$. Сравним результат теоремы Бейли при нулевых связях с начальными предположениями о подсистемах :

$$\dot{V}_i \leqslant -\frac{C_{i3}}{C_{i2}} V_i \qquad \text{из (3.7)},$$

то есть каждая из подсистем, рассматриваемая изолированно, имеет показатель затухания переходных процессов, равный $\frac{C_{i3}}{C_{i2}}$. А согласно теореме Бейли получаем :

$$\dot{\rho}_i \leqslant -\frac{C_{i3}}{2C_{i2}} \rho_i.$$

Мы видим, что здесь показатель затухания переходных процессов в два раза хуже. Этот результат пришел из леммы 3.2 — при $b = 0$ она утверждает, что

$$-az^2 \leqslant -\frac{a}{2} z^2.$$

3.3 Нелинейные системы сравнений

При исследовании системы

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3.10}$$

были получен набор функций Ляпунова $V_1(t, x), \dots, V_l(t, x)$, которые затем объединялись в векторную функцию Ляпунова и

$$\dot{V}_i(t, x) \leqslant G_i(t, V_1(t, x), \dots, V_l(t, x)), \quad i = 1, \dots, l. \tag{3.11}$$

Таким образом, решение всех вопросов об устойчивости системы (3.10) сводилось к исследованию системы

$$\dot{\rho}_i = G_i(t, \rho_1, \dots, \rho_l), \tag{3.12}$$

и при выполнении некоторых условий из того, что $V_i(t_0, x_0) = \rho(t_0)$, следовало, что

$$V_i(t, x(t)) \leqslant \rho_i(t), \quad t > t_0. \tag{3.13}$$

Однако для оправдания этого перехода (из выполнения (3.11) условие (3.13), вообще говоря, следует лишь при $l = 1$ — следствие теоремы о дифференциальных неравенствах Чаплыгина) функции G_i должны обладать некоторыми свойствами. Одно из них следует из неотрицательности V_i — G_i должны неубывать по внедиагональнымь переменным, то есть $G_i(t, \rho_1, \dots, \rho_{i-1}, 0, \rho_{i+1}, \dots, \rho_l) \geqslant 0$, $\forall \rho_j \geqslant 0$, $j \neq i$. Это условие гарантирует неотрицательность решения (3.12) при неотрицательных начальных данных. Подробнее об этом — теорема Башевского о дифференциальных неравенствах.

Рассмотрим систему (3.5):

$$\dot{x}_i = p_i(t, x) + h_i(t, x_1, \dots, x_l)$$
$$\|h_i(t, x_1, \dots, x_l)\| \leqslant \sum_{j \neq i} h_{ij} \|x_j\|$$

Рассмотрим функции Ляпунова для каждой подсистемы:

$$\dot{x} = p_i(t, x_i).$$

В предположении об экспоненциальной устойчивости функции Ляпунова удовлетворяют оценкам:

$$C_{i1}\|x_i\|^2 \leqslant V_i(t, x_i) \leqslant C_{i2}\|x_i\|^2$$
$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V_i}{\partial x}, p_i(t, x_i) \right\rangle \leqslant -\alpha_i V_i(t, x_i)$$
$$\left\| \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right\| \leqslant C_{i4}^2 V_i(t, x_i),$$

Тогда

$$\dot{V}_I(t, x_i) < -\alpha_i V_i(t, x_i) + \left\langle \frac{\partial V_i}{\partial x_i}, h_i(t, x_1, \dots, x_l) \right\rangle \leqslant$$
$$\leqslant -\alpha_i V_i(t, x_i) + C_{i4} V_i^{1/2}(t, x_i) \sum_{j \neq i} h_{i,j} \|x_j\| \leqslant$$
$$\leqslant -\alpha_i V_i(t, x_i) + \sum_{j \neq i} \frac{C_{i4}}{C_{j1}} V_i^{1/2}(t, x_i) V_j^{1/2}(t, x_j) h_{ij}.$$

Полученная система нелинейных дифференциальных неравенств называется нелинейной системой сравнений. Так как соответствующая ей система дифференциальных уравнений

$$\dot{\rho}_i = -\alpha_i \rho_i + \sum_{i \neq j} \frac{C_{i4}}{C_{j1}} \rho_i^{1/2} \rho_j^{1/2} h_{ij}$$

— система дифференциальных уравнений Бернулли, то можно сделать замену переменных $\rho_i = s_i^2$, и получим линейную систему уравнений:

$$\dot{s}_i = -\frac{\alpha_i}{2} + \sum_{i \neq j} \frac{C_{i4}}{C_{j1}} s_j h_{ij}.$$

Теорема. *Система* (3.5) *экспоненциально устойчива в целом тогда и только тогда, когда при сделанных предположениях*

$$(-1)^i \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_1}{2} & \frac{C_{i4}}{C_{11}} h_{12} & \dots & \frac{C_{14}}{C_{i1}} h_{1i} \\ \frac{C_{24}}{C_{21}} h_{21} & -\frac{\alpha_2}{2} & \dots & \frac{C_{24}}{C_{i1}} h_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{C_{i4}}{C_{i1}} h_{i1} & \frac{C_{i4}}{C_{i1}} h_{i2} & \dots & -\frac{\alpha_i}{2} \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

??????????????????????????????

Эта оценка не хуже оценки, полученной в пердыдущем параграфе, а при $h_{i,j} = 0$ ровно в два раза лучше.

3.4 Стабилизация взаимосвязанных систем

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i \varphi_i(t, u_i) + h_i(t, x_1, \dots, x_l) \tag{3.14}$$

Для каждой подсистемы

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i$$

строим свой закон управления

$$u_i = -B_i \Gamma_i x_i \tag{3.15}$$

$$\Gamma_i A_i + A_i \Gamma_i - 2\Gamma_i B_i B_i' \Gamma_i \leqslant -alpha_i \Gamma_i \tag{3.16}$$

$$V_i(x_i) = \|x_i\|^2_{\Gamma_i}$$

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i \varphi_i(t, u_i)$$

$$\dot{V}_i(t, x_i) \leqslant \alpha_i V_i(t, x_i). \tag{3.17}$$

Получили набор функций Ляпунова. Можно сформулировать условия, при которых экспоненциальная устойчивость системы (3.14) будет следовать из экспоненциальной устойчивости отдельных подсистем. В предыдущей теореме, ??? разрешив эту систему относительно α_i получим результат: стабилизируя каждую подсистему, мы стабилизируем всю систему.

Рис. 3.1: Пример стабилизации взаимосвязанных систем

Пример. *Рассмотрим систему* l *связанных маятников. Управлять каждым маятником можно только исходя из информации об отклонении только этого маятника. Такая система описывается следующей системой дифференциальных уравнений:*

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= a_1 x_1 + a_2 x_3 + \varphi_1(u_1, t), \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\mathrm{dot} x_4 &= a_2 x_1 + a_4 x_3 + a_1 x_5 + \varphi_2(u_2, t), \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Литература

[1] Н.И. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения.